

2024 秋季初二数学每日一题打卡 014

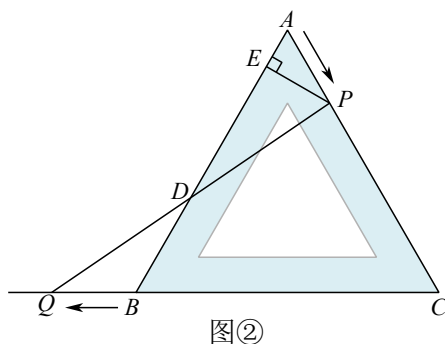
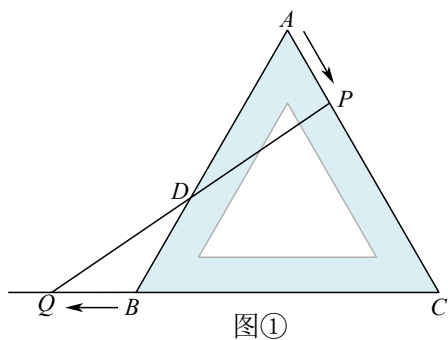
014 试题来源:2022 年秋季苏州期末阳光测评

【情境】某校数学兴趣小组尝试自制数学学具进行自主合作探究. 图①是一块边长为12cm 的等边三角形学具, P 是边 AC 上一个动点, 由点 A 向点 C 运动, 速度为 1cm/s , Q 是边 CB 延长线上一动点, 与点 P 同时以相同的速度由点 B 向 CB 延长线方向运动, 连接 PQ , 交 AB 于点 D , 设点 P 运动的时间为 $t(\text{s})$.

【问题】(1) 填空: $CP + CQ =$ _____ cm ;

(2) 当 $\angle DQB = 30^\circ$ 时, 求 t 的值;

【探究】如图②, 过点 P 作 $PE \perp AB$, 垂足为 E , 在点 P , 点 Q 运动过程中, 线段 DE 的长度是否发生变化? 若不变, 请求出 DE 的长度; 若变化, 请说明理由.



试题解析:

【情境】某校数学兴趣小组尝试自制数学学具进行自主合作探究. 图①是一块边长为12cm的等边三角形学具, P 是边 AC 上一个动点, 由点 A 向点 C 运动, 速度为1cm/s, Q 是边 CB 延长线上一动点, 与点 P 同时以相同的速度由点 B 向 CB 延长线方向运动, 连接 PQ , 交 AB 于点 D , 设点 P 运动的时间为 t (s).

【问题】(1) 填空: $CP + CQ =$ 24 cm;

(1) 解: $\because \triangle ABC$ 是边长为12的等边三角形,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ, AB = BC = AC = 12,$

设 $AP = t$ cm, 则 $PC = (12 - t)$ cm, $QB = t$ cm,

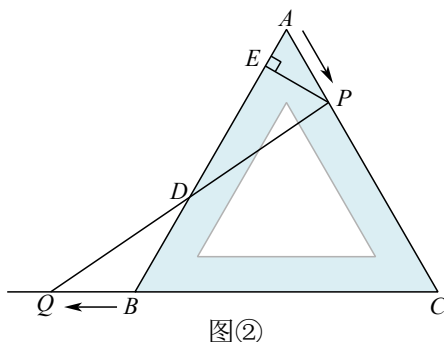
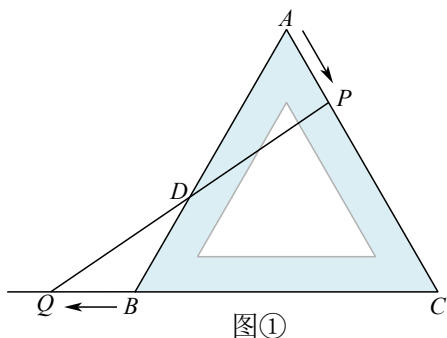
$\therefore QC = QB + BC = (12 + t)$ cm, $\therefore CP + CQ = 12 - t + 12 + t = 24$ (cm).

(2) 当 $\angle DQB = 30^\circ$ 时, 求 t 的值;

(2) 解: $\because \angle ACB = 60^\circ, \angle BQD = 30^\circ,$

$\therefore \angle QPC = 90^\circ, \therefore QC = 2PC, \therefore 12 + t = 2(12 - t), \therefore t = 4;$

【探究】如图②, 过点 P 作 $PE \perp AB$, 垂足为 E , 在点 P , 点 Q 运动过程中, 线段 DE 的长度是否发生变化? 若不变, 请求出 DE 的长度; 若变化, 请说明理由.



(3) 解: 线段 DE 的长度不改变,

过点 Q 作 $QF \perp AB$ 交 AB 延长线于点 F , 连接 EQ, PF ,

$\because PE \perp AB, QF \perp AB, \therefore \angle PED = \angle QFD = 90^\circ, \because$ 点 P, Q 速度相同, $\therefore AP = BQ,$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle A = \angle ABC = \angle FBQ = 60^\circ, \therefore \angle APE = \angle BQF = 30^\circ,$

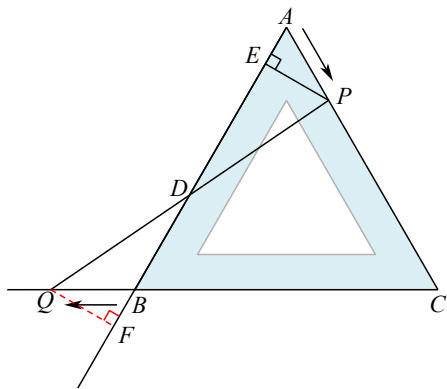
$\therefore AP = BQ, \angle AEP = \angle QFB, \angle A = \angle QBF, \therefore \triangle AEP \cong \triangle BFQ(AAS), \therefore AE = BF,$

$\therefore BE + AE = BF + BE, \therefore AB = EF = 12,$

$\because PE \perp AB, QF \perp AB, \therefore$ 在 $Rt\triangle AEP$ 和 $Rt\triangle BFQ$ 中, $PE = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{BQ^2 - BF^2} = QF,$

$\therefore PE = QF, \angle PDE = \angle QDF, \angle PED = \angle QFD, \therefore \triangle PED \cong \triangle QFD(AAS),$

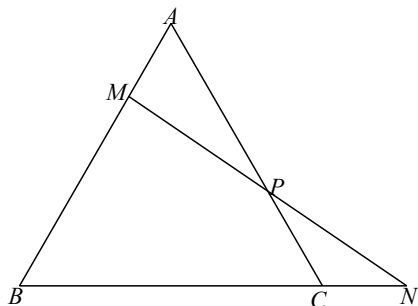
$\therefore DE = DF = \frac{1}{2}EF = 6, \therefore$ 线段 DE 的长度不改变.



【点评】苏科版初二上数学课时P47有此题的同类题, 都是构造. 小编整理了不同思考方向的三种解法, 与读者朋友们分享.(见下一页)

关于课时第 47 页 11 题的几种解法

(2022 怀化中考题改编) 如图, 在等边三角形 ABC 中, 点 M 为 AB 边上任意一点, 延长 BC 至点 N , 使 $CN = AM$, 连接 MN 交 AC 于点 P . 求证: $MP = NP$.



解前思考: 先看题干: $CN = AM$, 总感觉有些美中不足, 毕竟没有喜欢的全等. 再看结论: $MP = NP$, 如果成立, 点 P 就是线段 MN 的中点. 关于中点, 最长用的就是构造平行八字形全等, 过去所谓倍长中线本质上还是构造平行的八字形全等. 冲着构造平行八字形全等给出三种基本思路.

<p>法一: 过点 M 作 $MD \parallel BC$,</p> <p>\because 等边三角形 ABC,</p> <p>$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle ABC = 60^\circ$,</p> <p>$\therefore MD \parallel BC$</p> <p>$\therefore \angle ADM = \angle ACB = 60^\circ$,</p> <p>$\angle AMD = \angle ABC = 60^\circ$,</p> <p>$\therefore \angle A = \angle ADM = \angle AMD = 60^\circ$</p> <p>$\therefore \triangle AMD$ 为等边三角形,</p> <p>$\therefore MD = AM$,</p> <p>$\because CN = AM$,</p> <p>$\therefore MD = CN$,</p> <p>$\because MD \parallel BC$,</p> <p>$\therefore \angle DMP = \angle CNP$,</p> <p>在 $\triangle MDP$ 和 $\triangle NCP$ 中</p> $\begin{cases} \angle DMP = \angle CNP \\ \angle MPD = \angle NPC \\ MD = CN \end{cases}$ <p>$\therefore \triangle MDP \cong \triangle NCP (AAS)$,</p> <p>$\therefore MP = NP$.</p>	<p>法二: 过点 N 作 $NE \parallel AB$,</p> <p>\because 等边三角形 ABC,</p> <p>$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle ABC = 60^\circ$,</p> <p>$\therefore NE \parallel AB$,</p> <p>$\therefore \angle E = \angle A = 60^\circ$, $\angle CNE = \angle ABC = 60^\circ$,</p> <p>$\therefore \angle NCE = \angle ACB$,</p> <p>$\therefore \angle E = \angle CNE = \angle NCE = 60^\circ$,</p> <p>$\therefore \triangle CNE$ 为等边三角形,</p> <p>$\therefore CN = NE$,</p> <p>$\because CN = AM$,</p> <p>$\therefore AM = NE$,</p> <p>在 $\triangle AMP$ 和 $\triangle ENP$ 中,</p> $\begin{cases} \angle A = \angle E \\ \angle MPA = \angle NPE \\ AM = NE \end{cases}$ <p>$\therefore \triangle AMP \cong \triangle ENP (AAS)$,</p> <p>$\therefore MP = NP$.</p>	<p>法三: $MH \perp AC$, $NG \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 G.</p> <p>\because 等边三角形 ABC,</p> <p>$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle ABC = 60^\circ$,</p> <p>$\therefore \angle NCG = \angle ACB = \angle A = 60^\circ$,</p> <p>$\because MH \perp AC, NG \perp AC$,</p> <p>$\therefore \angle AHM = \angle CGN = 90^\circ$,</p> <p>$\therefore \angle AMH = \angle CNG = 30^\circ$,</p> <p>$\therefore AH = \frac{1}{2} AM, CG = \frac{1}{2} CN$,</p> <p>$\therefore AH = CG$,</p> <p>$\therefore MH = GN$ (貌似要用勾股思路才能通透)</p> <p>在 $\triangle MHP$ 和 $\triangle NGP$ 中,</p> $\begin{cases} \angle PHM = \angle PGN \\ \angle MPA = \angle NPE \\ MH = GN \end{cases}$ <p>$\therefore \triangle MHP \cong \triangle NGP (AAS)$,</p> <p>$\therefore MP = NP$.</p>